BTS CHIMIE 1990

EXERCICE 1

On considère un lot de tubes à essais. À chaque tube, on asocie son diamètre et sa hauteur exprimés en millimètres. On définit ainsi deux variables aléatoires d et h.

La variable aléatoire d suit la loi normale de moyenne $\mu_d = 19{,}7$ et d'écart-type $\sigma_d = 0{,}4$.

La variable aléatoire h suit la loi normale de moyenne $\mu_h = 203$ et d'écart-type $\sigma_h = 6$.

On suppose que les variables aléatoires d et h sont **indépendantes**.

1. Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'un tube à essais ait un diamètre inférieur à $20\,mm$.

2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'un tube à essais ait une hauteur supérieure à $195\,mm$.

3. Des contraintes d'expérience et d'entretien imposent les conditions suivantes :

$$19 < d < 20{,}5 \;\; et \;\; 195 < h < 210$$

Quel est le pourcentage de tubes à essais utilisables ?

EXERCICE 2

première partie

Lors de la dissociation thermique de l'iodure d'hydrogène à une température fixée, on montre que le taux de dissociation y de l'iodure d'hydrogène évolue en fonction du temps t (exprimé en secondes) selon une loi qui obeit à l'équation différentielle :

$$(E) \quad \frac{dy}{dt} = A(1-5y)(1+3y)$$

A étant une constante réelle strictement positive.

1. Vérifier que les fonctions constantes $y = -\dfrac{1}{3}$ et $y = \dfrac{1}{5}$ sont solutions de l'équation différentielle (E).

2. Dans la suite du problème, on cherche la solution non constante de l'équation (E), définie sur $\mathbb{R}$, et vérifiant $y(0) = 0$.

On admettra, dans les calculs, les inégalités

$$-\frac{1}{3} < y < \frac{1}{5}$$

a) Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{5}{8(1-5y)} + \frac{3}{8(1+3y)}\right) dy = Adt$$

b) Déduire de la question précédente la relation :

$$\frac{1+3y}{1-5y} = Ce^{8At}$$

où C est une constante réelle non nulle, et calculer la valeur de C correspondant à $y(0) = 0$.

c) Montrer que la solution cherchée peut s'écrire :

$$y(t) = \frac{e^{8At} - 1}{3 + 5e^{8At}}$$

Deuxième partie

1. Étudier les variations de la fonction

$$f\ :\quad x \mapsto \frac{e^x - 1}{3 + 5e^x}$$

sur $]-\infty, +\infty[$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Écrire une équation de la tangente en O, origine du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à la courbe représentative C_f de la fonction f.

b) On admettra que le point de coordonnées $\left(\ln\frac{3}{5}, -\frac{1}{15}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe, et que cette courbe est située au dessous de sa tangente en O au voisinage de ce point O.

Tracer la courbe C_f, sa tangente en O et ses asymptotes dans le repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec :

$$||\vec{\imath}|| = 1\,cm \quad et \quad ||\vec{\jmath}|| = 10\,cm$$

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0{,}1$.

En prenant 2.10^{-6} pour valeur de la constante A dans la première partie, peut-on en déduire au bout de combien d'heures le taux de dissociation de l'iodure d'hydrogène atteint la valeur 0,1 ?