

## BTS CHIMIE 1991

### EXERCICE 1

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où  $P_i$  représente la masse du produit exprimée en grammes et  $n_i$  l'effectif correspondant :

$P_i$	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
$n_i$	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.
3. Déterminer l'intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de 5 %.
4. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit.

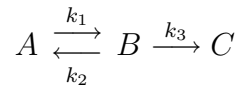
On admet que la variable aléatoire  $X$  qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en grammes, du produit dosé, suit la loi normale de moyenne  $m = 150$  et d'écart-type  $\sigma = 3$ .

Calculer  $P(147 \leq X \leq 155)$ .

En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

### EXERCICE 2

On étudie en chimie cinétique des réactions successives dont le schéma de réaction est le suivant :



Les lois cinétiques sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = -k_1[A] + k_2[B] \\ \frac{dB}{dt} = k_1[A] - (k_2 + k_3)[B] \\ \frac{dC}{dt} = k_3[B] \end{array} \right.$$

$[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  sont les concentrations à l'instant  $t$  des produits  $A$ ,  $B$  et  $C$  ( $t$  exprimé en minutes).  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  sont les constantes de vitesse exprimées en  $\text{min}^{-1}$ .

Les conditions à l'instant  $t = 0$  sont :

$$[A]_0 = a, \quad [B]_0 = 0 \quad \text{et} \quad [C]_0 = 0$$

On note  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les fonctions de la variable réelle  $t$  définies pour  $t \geq 0$  par :

$$x = \frac{[A]}{a} \quad y = \frac{[B]}{a} \quad z = \frac{[C]}{a}$$

On suppose que :  $k_1 = 1,6 \text{ min}^{-1}$ ,  $k_2 = 0,15 \text{ min}^{-1}$ ,  $k_3 = 1,25 \text{ min}^{-1}$ .

On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -1,6x + 0,15y \quad (1) \\ \frac{dy}{dt} = 1,6x - 1,4y \quad (2) \\ \frac{dz}{dt} = 1,25y \quad (3) \end{array} \right.$$

et  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = z(0) = 0$ .

## Première partie

1. En utilisant l'équation différentielle (1), déterminer  $y$  en fonction de  $x$  et de  $\frac{dx}{dt}$ .

En déduire  $\frac{dy}{dt}$  en fonction de  $\frac{dx}{dt}$  et de  $\frac{d^2x}{dt^2}$ .

En reportant  $y$  et  $\frac{dy}{dt}$  dans l'équation (2), établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par  $x$ .

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

où  $t \geq 0$ .

3. En utilisant la question précédente et la relation

$$y = \frac{1}{0,15} \frac{dx}{dt} + \frac{1,6}{0,15} x$$

montrer que  $x$  et  $y$  peuvent s'écrire sous la forme

$$x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$$

$$y(t) = 4\lambda e^{-t} - \frac{8}{3}\mu e^{-2t}$$

4. Sachant qu'en outre  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 0$ , calculer les réels  $\lambda$  et  $\mu$ .

5. En utilisant les relations (1), (2) et (3), calculer

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t) + z(t))$$

et en déduire que

$$z(t) = 1 - x(t) - y(t)$$

## Deuxième partie

1. Étudier le sens de variation des fonctions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$x(t) = 0,4e^{-t} + 0,6e^{-2t}$$

$$y(t) = 1,6(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$z(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1$$

2. Représenter graphiquement les fonctions  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dans un même plan rapporté au même repère orthogonal avec les unités suivantes :

4 cm pour 1 min sur l'axe des abscisses,

10 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées,

et  $t \in [0; 4]$ .

3. À quel instant le taux de formation de  $C$  atteint-il 90 %? Quel est à ce même instant le taux de disparition du produit  $A$ ?

Interpréter graphiquement les résultats.