BTS CHIMIE 1991

EXERCICE 1

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. Pour un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysés, on a obtenu les résultats suivants, où P_i représente la masse du produit exprimée en grammes et n_i l'effectif correspondant :

P_i	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160
n_i	1	5	6	21	32	22	7	4	1	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

2. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart-type de la population.

3. Déterminer l'intervalle de confiance de la moyenne de la population au risque de 5 %.

4. Un lot de 5 kilogrammes de mélange est dit de qualité « extra » s'il contient entre 147 grammes et 155 grammes de produit.
On admet que la variable aléatoire X qui, à un lot de 5 kilogrammes de mélange, associe la masse, exprimée en grammes, du produit dosé, suit la loi normale de moyenne $m = 150$ et d'écart-type $\sigma = 3$.
Calculer $P(147 \leqslant X \leqslant 155)$.
En déduire le pourcentage de qualité extra dans le produit.

EXERCICE 2

On étudie en chimie cinétique des réactions successives dont le schéma de réaction est le suivant :

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \xrightarrow{k_3} C$$

Les lois cinétiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -k_1[A] + k_2[B] \\ \dfrac{dB}{dt} = k_1[A] - (k_2 + k_3)[B] \\ \dfrac{dC}{dt} = k_3[B] \end{cases}$$

$[A]$, $[B]$ et $[C]$ sont les concentrations à l'instant t des produits A, B et C (t exprimé en minutes). k_1, k_2 et k_3 sont les constantes de vitesse exprimées en min^{-1}.

Les conditions à l'instant $t = 0$ sont :

$$[A]_0 = a, \quad [B]_0 = 0 \;\; et \; [C]_0 = 0$$

On note x, y, z les fonctions de la variable réelle t définies pour $t \geqslant 0$ par :

$$x = \frac{[A]}{a} \qquad y = \frac{[B]}{a} \qquad z = \frac{[C]}{a}$$

On suppose que : $k_1 = 1{,}6\,min^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\,min^{-1}$, $k_3 = 1{,}25\,min^{-1}$.

On a donc

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1{,}6x + 0{,}15y & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1{,}6x - 1{,}4y & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = 1{,}25y & (3) \end{cases}$$

et $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$.

Première partie

1. En utilisant l'équation différentielle (1), déterminer y en fonction de x et de $\dfrac{dx}{dt}$.
En déduire $\dfrac{dy}{dt}$ en fonction de $\dfrac{dx}{dt}$ et de $\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

En reportant y et $\dfrac{dy}{dt}$ dans l'équation (2), établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants vérifiée par x.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

où $t \geqslant 0$.

3. En utilisant la question précédente et la relation

$$y = \frac{1}{0{,}15}\frac{dx}{dt} + \frac{1{,}6}{0{,}15}x$$

montrer que x et y peuvent s'écrire sous la forme

$$x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$$

$$y(t) = 4\lambda e^{-t} - \frac{8}{3}\mu e^{-2t}$$

4. Sachant qu'en outre $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$, calculer les réels λ et μ.

5. En utilisant les relations (1), (2) et (3), calculer

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + y(t) + z(t)\right)$$

et en déduire que

$$z(t) = 1 - x(t) - y(t)$$

Deuxième partie

1. Étudier le sens de variation des fonctions x, y, z définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$x(t) = 0{,}4e^{-t} + 0{,}6e^{-2t}$$

$$y(t) = 1{,}6(e^{-t} - e^{-2t})$$

$$z(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1$$

2. Représenter graphiquement les fonctions x, y, z dans un même plan rapporté au même repère orthogonal avec les unités suivantes :
 $4\,cm$ pour $1\,min$ sur l'axe des abscisses,
 $10\,cm$ pour 1 unité sur l'axe des ordonnées,
et $t \in [0; 4]$.

3. À quel instant le taux de formation de C atteint-il 90 % ? Quel est à ce même instant le taux de disparition du produit A ?
Interpréter graphiquement les résultats.