

# BTS CHIMIE 1996

## EXERCICE 1

Dans une entreprise de produits d'entretien, on envisage de distribuer gratuitement à l'occasion d'une campagne publicitaire dix mille sachets d'une nouvelle poudre à laver. On remplit les sachets à l'aide d'une machine. Pendant l'opération, on se livre au prélèvement d'un sachet de temps à autre pour en contrôler la masse. Les cinq cents sachets prélevés constituent un échantillon dont les masses en  $g$  se répartissent en 10 classes données dans le tableau suivant :

Classes	Effectifs
[141,143[	11
[143,145[	27
[145,147[	53
[147,149[	85
[149,151[	104
[151,153[	97
[153,155[	60
[155,157[	30
[157,159[	18
[159,161[	15

1. a. Calculer une valeur approchée de la moyenne  $m$  et de l'écart type  $s$  de cette série. Compte-tenu de l'erreur commise en supposant toutes les observations d'une classe au centre de celle-ci, on se contentera d'une précision de  $0,5 \cdot 10^{-2}$ .

b. On suppose que le poids d'un sachet pris au hasard dans le stock suit une loi gaussienne de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ . Utiliser ces données pour estimer ponctuellement la moyenne  $\mu$  et l'écart type  $\sigma$  de l'ensemble des sachets confectionnés.

2. Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur la masse en grammes d'un sachet. On suppose que  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(150; 4)$ .

Calculer les probabilités suivantes : a.  $P(X < 148)$ ; b.  $P(147 < X < 157)$ .

3. Pour livrer les sachets à une agence chargée de la distribution, on conditionne ceux-ci sous la forme de caissons de 120 sachets. Soit  $Y$  la variable aléatoire qui à tout caisson de 120 sachets associe la moyenne des masses en grammes d'un sachet de poudre.

a. Justifier que  $Y$  suit la loi normale  $\mathcal{N}\left(150; \frac{4}{\sqrt{120}}\right)$ .

b. Trouver  $a$  pour que l'on ait :  $P(150 - a < Y < 150 + a) = 0,95$ .

## EXERCICE 2

*Le but du problème est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif, le Thorium<sup>227</sup>, qui donne du Radium<sup>223</sup>, lequel se désintègre à son tour en donnant du Radon<sup>219</sup>.  
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.*

### Partie 1

1. Soit  $N_0$  le nombre d'atomes de Thorium à l'instant  $t = 0$ ,  $N_1$  le nombre d'atomes de Thorium un jour après,  $N_k$  le nombre d'atomes de Thorium  $k$  jours après ( $k$  entier).

On sait que le nombre d'atomes de Thorium diminue de 3,7 % par jour.

- a. Donner l'expression de  $N_1$  en fonction de  $N_0$ , puis  $N_{k+1}$  en fonction de  $N_k$ .
- b. En déduire la nature de la suite  $(N_k)$  et l'expression de  $N_k$  en fonction de  $N_0$  et  $k$ . Déterminer alors à  $10^{-4}$  près le coefficient  $a$  tel que  $N_k = N_0 \cdot e^{ak}$ .

2. On considère la fonction  $N$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,038t}$ .

On admet que  $N(t)$  représente le nombre d'atomes de Thorium à l'instant  $t$  (l'unité de temps est le jour).

- a. Étudier la limite de  $N$  en  $+\infty$ .
- b. Étudier les variations de  $N$  et donner son tableau de variation.

## Partie 2

À l'instant  $t = 0$ , on isole  $N_0$  atomes de Thorium. On note  $R(t)$  le nombre d'atomes de Radium à l'instant  $t$ , pour  $t$  dans l'intervalle  $[0, +\infty[$ . À l'instant  $t = 0$ , il n'y a aucun atome de Radium. On admet que la fonction  $R$  est la solution sur  $[0, +\infty[$  de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,062y = 0,038 N_0 \cdot e^{-0,038t}$$

qui vérifie la condition initiale  $R(0) = 0$ .

1. a. Montrer que la fonction  $y_1$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$y_1(t) = \left(\frac{19}{12}\right) N_0 \cdot e^{-0,038t}$$

est une solution de  $(E)$ .

- b. Déterminer dans  $[0, +\infty[$  la solution générale  $y_0$  de l'équation sans second membre associée à l'équation  $(E)$ .
- c. En déduire la solution générale  $y$  de  $(E)$ .
- d. Déterminer alors la fonction  $R$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(t) = e^{-0,038t} - e^{-0,062t}$$

- a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- b. Montrer que  $f'(t) = e^{-0,038t} [-0,038 + 0,062e^{-0,024t}]$ .
- c. Donner la valeur exacte  $t_0$ , puis une valeur décimale approchée à  $10^{-1}$  près de la solution de l'équation  $f'(t) = 0$ .

Justifier alors le signe de  $f'(t)$  suivant les valeurs de  $t$ .

d. Donner le tableau de variation de  $f$ .

3. Donner l'expression de  $R(t)$  en fonction de  $f(t)$ .  
En déduire le tableau de variation de  $R$ .