BTS CHIMISTE

Session 2004

EPREUVE de MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : *(10 points)*

On étudie la cinétique, à 100°C, de la substitution de l'atome de chlore de l'acide monochloroacétique par OH^- selon la réaction :

$$\text{Cl-CH}_2\text{COO}^- + \text{OH}^- \longrightarrow \text{HO-CH}_2\text{COO}^- + \text{Cl}^-$$

- à l'instant t = 0, les concentrations des réactifs sont : $\left[\text{OH}^-\right]_0 = a$ et $\left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right]_0 = \dfrac{a}{2}$

  où a est un réel donné tel que $a > 0$
- de même à l'instant *t*, $\left[\text{OH}^-\right] = a - x(t)$ et $\left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right] = \dfrac{a}{2} - x(t)$ avec $0 \leq x(t) < \dfrac{a}{2}$
- à l'instant *t*, le rendement de la réaction vaut $r(t) = \dfrac{x(t)}{a/2}$

On admet que la vitesse de la réaction est donnée par la relation :

$$v = \frac{dx}{dt} = k \cdot \left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right] \cdot \left[\text{OH}^-\right]$$

où k est une constante liée à la réaction avec t s'exprimant en secondes.

PARTIE A : *Etude théorique*

1. Etablir l'équation différentielle, notée (E), liant $\dfrac{dx}{dt}$, x, a et k.
2. Trouver les constantes λ et μ, exprimées en fonction de a, telles que :

   pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{a}{2}\right[$ $\qquad \dfrac{2}{(a-x)(a-2x)} = \dfrac{\lambda}{a-x} + \dfrac{\mu}{a-2x}$

3. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$ est telle que : $\ln\left(\dfrac{a-x(t)}{a-2x(t)}\right) = \dfrac{ak}{2}t$ où ln est la fonction logarithme népérien.
4. Montrer que $r(t) = \dfrac{2\left(1-e^{At}\right)}{1-2e^{At}}$ où $A = \dfrac{ak}{2}$ et r désigne le rendement de la réaction.
5. On considère dans cette question que $A = 8 \cdot 10^{-4}$; déterminer alors le temps t (arrondi à la seconde) pour lequel le rendement $r(t)$ de la réaction est égal à 0,9.

PARTIE B : *Exploitation de résultats expérimentaux – détermination de k*

On donne a = 1,65 mol.L^{-1} . En posant $y(t) = \ln\left(\dfrac{a-x(t)}{a-2x(t)}\right)$, on obtient les résultats expérimentaux suivants :

t (en secondes)	0	150	300	900	1200	1500	1800	2100	2400
y(*t*)	0	0,097	0,222	0,688	0,902	1,130	1,408	1,550	1,938

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrées sous la forme : $y = mt + p$ où m et p sont des coefficients réels ; m sera donné avec une précision de 10^{-6} et p avec une précision de 10^{-3}.

2. En estimant que p est très proche de 0, et en utilisant le résultat de la modélisation de la 3[è] question de la partie A, déterminer une valeur approchée de la constante k de la réaction.

Exercice 2 : *(10 points) Etude expérimentale d'une colle à prise chimique*

Un fabricant met au point une nouvelle colle à prise chimique (par polymérisation). Durant la phase de collage, la résistance à la traction de la colle augmente de façon significative jusqu'à une valeur maximale. Le fabricant veut étudier la « durée de prise », c'est à dire la durée nécessaire pour que la résistance de la colle atteigne les trois quarts de sa valeur maximale.

Partie A

Le fabricant étudie l'influence de deux facteurs, la température et l'humidité ambiantes, sur la durée de prise de la colle.
Il note X_1 (resp. X_2) la variable qui associe au facteur température (resp. humidité) son niveau, et Y la durée de prise étudiée (exprimée en minutes).
Il procède à un plan d'expérience factoriel 2^2 dont les résultats figurent ci-dessous.

Tableau 1 :

Température X_1	Humidité X_2	Durée de prise Y (en min)
18°C	faible	11
22°C	faible	9
18°C	forte	10
22°C	forte	13

niveau	-1	+1
température	18°C	22°C
humidité	faible	forte

Le modèle retenu pour Y est un modèle polynomial du type :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1X_2 + \varepsilon$$

1) Reproduire et compléter la matrice complète des expériences et des effets, construite selon l'algorithme de Yates :

Expérience	Moyenne	X_1	X_2	X_1 X_2	Y
1					
2					
3					
4					
Effets	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

2) Calculer les estimations ponctuelles des effets principaux et de l'interaction.
Ecrire l'équation du modèle de Y en fonction de X_1 et X_2.

3) Interprétation des effets :
   a. Peut-on négliger l'interaction ?
   b. A la température de 20°C ($X_1 = 0$) comment varie la durée de prise lorsque l'humidité varie du niveau faible à fort ?

Partie B

Le fabricant effectue une deuxième campagne de mesures : il fait réaliser 100 collages indépendants, dans des conditions de température variables entre 18°C et 22°C. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Tableau 2 :

Durée de prise en minutes	[8,5;9[	[9;9,5[	[9,5;10[	[10;10,5[	[10,5;11[	[11;11,5[	[11,5;12[	[12;12,5[	[12,5;13[
Effectif	0	6	9	17	22	27	13	4	2

1) Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type s de la série de mesures du tableau 2 (on donnera $\overline{x}$ à 0,01 près et s à 0,1 près).

2) On admet ici que la durée de prise est une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 0,8$.

   On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à une série quelconque de 100 collages indépendants associe sa durée moyenne de prise.

   Donner la loi de probabilité de $\overline{X}$ en fonction de μ et σ.

3) Le fabricant construit un test bilatéral pour tester l'hypothèse nulle H_0 : « $\mu = 10,75$ » au seuil de signification de 95% ; l'hypothèse alternative est donc H_1 : « $\mu \neq 10,75$ ».

   a) Sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 0,01 près du réel *h* telle que :
   $$P\left(\mu - h \leq \overline{X} \leq \mu + h\right) = 0,95.$$

   b) En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 95%.

   c) Enoncer la règle de décision du test.

   d) Appliquer le test à la série de mesures du tableau 2 et conclure.