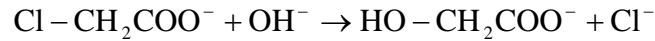


ENONCE DE LA PARTIE A DE L'EXERCICE 1

Situation :

On étudie la cinétique, à 100°C, de la substitution de l'atome de chlore de l'acide monochloroacétique par OH⁻ selon la réaction



- à l'instant $t = 0$, les concentrations des réactifs sont : $[\text{OH}^-]_0 = a$ et $[\text{Cl}-\text{CH}_2\text{COO}^-]_0 = \frac{a}{2}$ où a est un réel donné strictement positif.
- de même à l'instant t , $[\text{OH}^-]_t = a - x(t)$ et $[\text{Cl}-\text{CH}_2\text{COO}^-]_t = \frac{a}{2} - x(t)$ avec $0 \leq x(t) < \frac{a}{2}$
- à l'instant t , le rendement de la réaction vaut $r(t) = \frac{x(t)}{\frac{a}{2}}$

On rappelle que $x'(t)$ est la vitesse v de la réaction à l'instant t , et que les lois cinétiques conduisent à :

$$v = k[\text{OH}^-]_t[\text{Cl}-\text{CH}_2\text{COO}^-]_t$$

où k est une constante cinétique non nulle et positive liée à cette réaction.

Dans l'étude de cette cinétique, le temps t s'exprime en secondes et les concentrations en mol.L⁻¹

PARTIE A : *Eléments théoriques*

Dans la suite,

- \ln est la fonction logarithme népérien ;
- k et a sont des réels donnés strictement positifs.
- I désigne l'intervalle de \mathbb{R} suivant : $I = [0 ; \frac{a}{2}[$
-

I- Considérons la fonction numérique f de variable réelle x , définie sur I par :

$$f(x) = \frac{2}{a-2x} - \frac{1}{a-x}$$

I-1) Vérifier que :

$$f(x) = \frac{a}{(a-2x)(a-x)}$$

I-2) Calculer, sur I , la dérivée de chacune des deux fonctions suivantes :

- $x \rightarrow \ln(a-x)$
- $x \rightarrow \ln(a-2x)$

I-3) En déduire une primitive F de f sur I

II- On considère désormais l'équation différentielle (E)

$$\begin{cases} x'(t) = k(a - x(t))\left(\frac{a}{2} - x(t)\right) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

On admet que l'équation (E) admet une solution unique

$$\begin{aligned} \varphi : [0 ; +\infty[&\rightarrow I \\ t &\rightarrow \varphi(t) \end{aligned}$$

II-1) Démontrer que la fonction φ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

II- 2) Démontrer que : $\ln\left(\frac{a - \varphi(t)}{a - 2\varphi(t)}\right) = \frac{ak}{2}t$

Éléments de rédaction :

Par hypothèse, la fonction φ est une solution de (E)

Donc,

$$\begin{cases} \varphi'(t) = k(a - \varphi(t))\left(\frac{a}{2} - \varphi(t)\right) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Rq $\varphi(t) \in I$ et $k > 0$; donc $\varphi'(t) > 0$ et ainsi : φ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

$$\begin{cases} \frac{\varphi'(t)}{(a - \varphi(t))\left(\frac{a}{2} - \varphi(t)\right)} = k \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Rq : } \varphi(t) \in I, \text{ le quotient est défini sur } [0 ; +\infty[$$

$$\begin{cases} \frac{a\varphi'(t)}{(a - \varphi(t))(a - 2\varphi(t))} = \frac{ak}{2} \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \circ \varphi(t) \times \varphi'(t) = \frac{ak}{2} \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \circ \varphi(t) = \frac{ak}{2}t + C \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Rq : reconnaître la dérivée d'une composée ... } (v \circ u)' = v' \circ u \times u'$$

D'après ce qui précède, $F(x) = \ln \frac{a-x}{a-2x}$, on remarque que $F(0) = 0 = C$ et ainsi :

$$\ln\left(\frac{a - \varphi(t)}{a - 2\varphi(t)}\right) = \frac{ak}{2}t \quad \underline{\text{cqfd}}$$

Partie B : Retour à la situation, le calcul du rendement de la réaction

1) Démontrer que : $r(t) = 2 \frac{1 - e^{At}}{1 - 2e^{At}}$ où $A = \frac{ak}{2}$

2) On considère dans cette question que $A = 8.10^{-4} \text{ s}^{-1}$; déterminer alors le temps t arrondi à la seconde pour lequel le rendement $r(t)$ est égal à 90%

Éléments de rédaction

La loi cinétique,

$$v = k[\text{OH}^-]_t [\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-]_t$$

conduit à l'équation différentielle (E) d'inconnue x étudiée dans la partie A. II.

$$\begin{cases} x'(t) = k(a - x(t))\left(\frac{a}{2} - x(t)\right) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet une solution unique φ de $[0 ; +\infty[$ dans $[0 ; \frac{a}{2}[$

Donc, $x(t) = \varphi(t)$

et ainsi, le rendement r à l'instant t vaut :

$$r(t) = \frac{\varphi(t)}{\frac{a}{2}}$$

D'autre part,

$$\ln\left(\frac{a - \varphi(t)}{a - 2\varphi(t)}\right) = At \quad \text{avec} \quad A = \frac{ak}{2} \quad (\text{Partie A question II.1})$$

$$\frac{a - \varphi(t)}{a - 2\varphi(t)} = e^{At}$$

$$a - \varphi(t) = ae^{At} - 2\varphi(t)e^{At}$$

$$a - ae^{At} = \varphi(t) - 2\varphi(t)e^{At}$$

$$a(1 - e^{At}) = (1 - 2e^{At})\varphi(t)$$

$$\varphi(t) = a \frac{1 - e^{At}}{1 - 2e^{At}} \quad \underline{\text{Rq}} : \varphi(t) = a \frac{1 - e^{-At}}{2 - e^{-At}} \quad \text{et } A > 0 \text{ ce qui conduit à } \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \frac{a}{2}$$

Finalement,

$$r(t) = \frac{a \frac{1 - e^{At}}{1 - 2e^{At}}}{\frac{a}{2}} = 2 \frac{1 - e^{At}}{1 - 2e^{At}} \quad \text{cqfd}$$